DK 678.4.074 : 620.1 : 519.2 August 1974

Statistische Auswertung
an Stichproben mit Beispielen aus der Elastomer- und Kunststoffprüfung

DIN 53 598 Blatt 1

Statistical evaluation at off-hand samples with examples from testing of elastomers and plastics

Evaluation statistique aux prélèvements avec exemples d'essai des élastomères et des matières plastiques

Es ist beabsichtigt, allgemeine Normen über die Anwendung der Statistik herauszugeben. Nach Erscheinen dieser Normen ist die vorliegende Norm zu überprüfen.

Inhalt

Erläuterungen siehe Original-Normblatt

Fortsetzung Seite 2 bis 8

Fachnormenausschuß Materialprüfung (FNM) im Deutschen Normenausschuß (DNA)
Fachnormenausschuß Kautschukindustrie (FAKAU) im DNA
Fachnormenausschuß Kunststoffe (FNK) im DNA

1. Zweck und Anwendung

In dieser Norm sind die wichtigsten statistischen Begriffe und Verfahren zum Auswerten von Meßergebnissen bei Prüfungen mit überwiegend kleiner Probenanzahl zusammengestellt und an Hand von Beispielen erläutert. Die Anwendungsbeispiele betreffen vorzugsweise die technologischen Prüfungen von Elastomeren und Kunststoffen. Mit Hilfe dieser Norm sollen Aussagen über die Eigenschaftswerte von Werkstoffen oder Erzeugnissen auf Grund einer geringen Anzahl von Messungen gemacht werden. Dabei soll insbesondere festgestellt werden, in welchem Bereich die Ergebnisse Vertrauen beanspruchen können und ob im Hinblick auf den Zweck der Prüfungen die Probenanzahl ausreichend war oder vergrößert werden muß.

Verfahren zum Auswerten größerer Zahlenreihen siehe DIN 55 302 Blatt 1 und Blatt 2.

2. Begriffe

Eine Prüfung besteht in der Regel aus wiederholten Messungen der gleichen Eigenschaftswerte.

Die Messungen werden an Stichproben durchgeführt. Alle möglichen Stichproben zusammen bilden die sogenannte Grundgesamtheit. Aussagen über Eigenschaften dieser Grundgesamtheit sind das Ziel einer Prüfung.

Eine Anzahl von Meßwerten kann durch bestimmte statistische Maßzahlen charakterisiert werden. In dieser Norm werden zwei Arten von statistischen Maßzahlen behandelt, die zur Charakterisierung mindestens notwendig sind. Maßzahlen der einen Art beschreiben die mittlere Lage, die der anderen Art die Streuung einer Stichprobe der Grundgesamtheit.

2.1. Maßzahlen zur Kennzeichnung der mittleren Lage

2.1.1. Arithmetischer Mittelwert
(Beispiele siehe Abschnitte 5.1 und 5.2)

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ aus n Einzelwerten x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) ist die durch n geteilte Summe der Einzelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Für die numerische Berechnung ist es häufig einfacher, anstatt mit x_i mit

$$z_i = x_i - a \tag{2a}$$

zu rechnen, wobei a einen frei zu wählenden Zahlenwert, vorzugsweise in der Nähe des zu schätzenden Mittelwertes, darstellt. Für den arithmetischen Mittelwert gilt dann:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = a + \bar{z} \tag{2b}$$

Anmerkung 1: Bei größeren Stichproben kann es vorteilhaft sein, die Meßwerte in Klassen zusammenzufassen (siehe DIN 55 302 Blatt 1).

2.1.2. Median (Beispiel siehe Abschnitt 5.3)

Ordnet man die n Einzelwerte

$$x_i \; [i = 1, 2, \ldots n],$$

die zunächst in der Reihenfolge der Beobachtung notiert sind, dem Wert nach, so erhält man eine Reihe:

$$x_{(i)} \; [(i) = 1, 2, \ldots n].$$

Die Klammer des Index soll auf die Umsortierung hinweisen.

Bei einer ungeraden Anzahl von Einzelwerten ist der mittelste Wert der geordneten Reihe der Median $\tilde{x}$ (sprich x Tilde oder Median von x):

$$\tilde{x} = x_{(n+1)/2} \tag{3}$$

Bei einer geraden Anzahl n gibt es keinen mittelsten Wert. Der Median wird dann konventionell durch das arithmetische Mittel der beiden mittelsten Werte ersetzt:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{n/2} + x_{(n/2+1)}\right) \tag{4}$$

Besteht die Absicht, den Median aus einer Reihe von Meßwerten zu bilden, ist es angebracht, von vornherein eine ungerade Anzahl von Einzelwerten zu bestimmen, um Gleichung (3) anwenden zu können.

Anmerkung 2: Zu nennen ist noch der Modalwert, auch Mode oder Dichtemittel D genannt und definiert als der häufigste Wert in einer Verteilung.

Während der Median $\tilde{x}$ eine Verteilung definitionsgemäß in zwei gleiche Teile teilt, liegt z. B. bei einer negativ schiefen Verteilung (d. h. einer sogenannten rechtsgipfligen Verteilung) — wie sie z. B. für die Reißkraft und Reißdehnung von Elastomeren gemäß DIN 53 504 vorkommen kann — der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ niedriger und das Dichtemittel D höher als der Median $\tilde{x}$.

2.1.3. Mittelwert transformierter Größen
(Beispiele siehe Abschnitte 5.4 und 5.8)

Unter Umständen ist eine Transformation der Einzelwerte angebracht. So liefert z. B. der arithmetische Mittelwert von logarithmierten Einzelwerten

$$\lg \bar{x}_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lg x_i \tag{5}$$

nach dem Entlogarithmieren den geometrischen Mittelwert $\bar{x}_G$.

Das geometrische Mittel $\bar{x}_G$ ist also die n-te Wurzel aus dem Produkt der Einzelwerte

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \tag{6}$$

Es ist zu beachten, daß nur positive Einzelwerte vorliegen dürfen.

Außer der logarithmischen Transformation können auch andere Transformationen vorteilhaft angewendet werden: Die gemittelte Summe der Kehrwerte bildet z. B. den Kehrwert des harmonischen Mittelwertes (siehe DIN 55 302 Blatt 1 und Blatt 2). Unter Umständen ist es zweckmäßig, mit den Wurzeln oder Potenzen der Einzelwerte zu rechnen.

Anmerkung 3: Eine Transformation ist von Vorteil, falls man nach der Transformation eine Verteilung für die Grundgesamtheit erhält, die besser der Normalverteilung entspricht. Unter der Normalverteilung, die auch unter dem Namen Gauß-Laplace-Verteilung bekannt ist, versteht man eine symmetrische Verteilung, die durch eine hier nicht anzugebende Gleichung bestimmt ist und die durch zwei statistische Maßzahlen, den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung, eindeutig beschrieben wird. Die meisten der im Abschnitt 3 dieser Norm angegebenen Aussagen gelten im strengen Sinne nur, falls die zu untersuchende Grundgesamtheit einer Normalverteilung gehorcht.

2.2. Maßzahlen zur Kennzeichnung der Streuung

2.2.1. Varianz und Standardabweichung
(Beispiele siehe Abschnitte 5.1 und 5.2)

Um die Streuung von n Einzelwerten x_i ($i = 1, 2, \ldots n$) einer Stichprobe zu erfassen, bildet man die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom arithmetischen Mittelwert und dividiert sie durch die Anzahl der Freiheitsgrade $f = n - 1$. Man erhält dann die Varianz s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{7}$$

Den Absolutwert der Quadratwurzel aus der Varianz bezeichnet man als Standardabweichung s:

$$s = \left| \sqrt{s^2} \right| \tag{8}$$

Für das Maschinenrechnen und zum Vermeiden von Rundungsfehlern ist die Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum x_i \right)^2 \right] \tag{9}$$

vorzuziehen bzw.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum (x_i - a)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum (x_i - a) \right)^2 \right] \tag{10}$$

wobei a ein frei zu wählender Zahlenwert ist, der eingeführt werden kann, um mit einfacheren Zahlen zu rechnen.

Die Summe der Abweichungsquadrate entspricht somit der Differenz aus der Summe der Quadrate der Einzelwerte und des durch n geteilten Quadrats der Summe der Einzelwerte, letzteres auch Korrektionsglied genannt.

Anmerkung 4: An Stelle des griechischen Buchstabens Σ wird häufig der für die Maschinenschreibweise zweckmäßigere Buchstabe S angewendet.

2.2.2. Variationskoeffizient (Beispiel siehe Abschnitt 5.4)

Für die Angabe der relativen Streuung in % dividiert man die Standardabweichung durch den arithmetischen Mittelwert. Den mit 100 multiplizierten Quotienten nennt man Variationskoeffizient v in %:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \tag{11}$$

2.2.3. Spannweite (Beispiel siehe Abschnitt 5.3)

Die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Einzelwert einer Stichprobe nennt man Spannweite und bezeichnet sie mit dem Buchstaben R. Sie ist ebenfalls ein Maß für die Streuung:

$$R = x_{max} - x_{min} \tag{12}$$

Die Anzahl n der Einzelwerte, aus der die Spannweite gewonnen wurde, ist anzugeben, z. B. als Index der Form R_n. Wird die Spannweite zum Schätzen der Standardabweichung der Grundgesamtheit benützt, soll möglichst $n \leqq 13$ sein (siehe Anmerkung 2).

Liegt eine größere Stichprobe vor, so teilt man diese zweckmäßig in gleichgroße Gruppen auf und bildet die mittlere Spannweite $\bar{R}$ als arithmetisches Mittel aus den einzelnen Spannweiten R der Gruppen.

Anmerkung 5: Für $n = 7$ bzw. $n = 8$ ergibt sich die durchschnittlich beste Schätzgenauigkeit der Standardabweichung (siehe Abschnitt 3.5).

3. Statistische Aussagen und Auswertungen

3.1. Allgemeines

Die Prüfung einer bestimmten Eigenschaft eines Prüfgutes hat im allgemeinen das Ziel:

a) den Mittelwert μ der Grundgesamtheit zu bestimmen, den man als wahren Mittelwert bezeichnet,

b) die Standardabweichung σ oder den Variationskoeffizienten γ der Grundgesamtheit zu ermitteln, die man als wahre Standardabweichung oder wahren Variationskoeffizienten bezeichnet.

Hierfür wäre die Prüfung aller Glieder der Grundgesamtheit erforderlich. Üblicherweise wird nur eine beschränkte Anzahl von Messungen durchgeführt, und diese sind mit mehr oder weniger großen Zufallsfehlern behaftet. Deshalb kann man in einem auf n Einzelwerte beschränkten Versuch aus den statistischen Maßzahlen $\bar{x}$ und s nur einen Bereich angeben, in dem sich die wahren statistischen Maßzahlen μ und σ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit befinden.

3.2. Statistischer Streubereich

Gehorcht die Streuung der Einzelwerte einer Grundgesamtheit der Normalverteilung (siehe Anmerkung 3) mit dem wahren Mittelwert μ und der wahren Standardabweichung σ, so liegen in dem Bereich des wahren Mittelwertes

$\mu \pm 0{,}67\,\sigma$: 50%
$\mu \pm 1{,}00\,\sigma$: 68%
$\mu \pm 1{,}64\,\sigma$: 90%
$\mu \pm 1{,}96\,\sigma$: 95%
$\mu \pm 2{,}58\,\sigma$: 99%
$\mu \pm 3{,}00\,\sigma$: 99,7%
$\mu \pm 3{,}09\,\sigma$: 99,8%
$\mu \pm 3{,}29\,\sigma$: 99,9%

der Einzelwerte.

Zur Beschreibung des Streubereiches werden vielfach die 3σ-Grenzen verwendet. Bei einer Grundgesamtheit mit einer beliebigen Verteilung der Einzelwerte, einem wahren Mittelwert μ und einer wahren Standardabweichung σ, liegen innerhalb des Bereiches $\mu \pm 3\sigma$ (d. h. innerhalb der 3σ-Grenzen) mindestens $^8/_9$, also etwa 89% aller Werte.

Bei den in der Technik meist vorkommenden Verteilungen liegen innerhalb der 3σ-Grenzen mindestens 95% und bei einer Normalverteilung 99,73% der Werte.

In der Praxis werden bevorzugt die 2σ-Grenzen verwendet, innerhalb deren bei beliebiger Verteilung der Grundgesamtheit mindestens $^3/_4$, also 75% aller Werte, bei einer Normalverteilung 95,45% der Werte liegen.

3.3. Irrtumswahrscheinlichkeit α und Aussagewahrscheinlichkeit P

Statistische Aussagen lassen sich nie mit voller Gewißheit machen. Es muß damit gerechnet werden, daß sie zu einem gewissen Anteil nicht zutreffen. Diesen Anteil bezeichnet man als Irrtumswahrscheinlichkeit α in %. Liegt z. B. eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ vor, so soll damit ausgedrückt werden, daß die Aussage durchschnittlich in 5% der Fälle nicht erfüllt wird, dagegen in 95% der Fälle zutrifft. Statt der Irrtumswahrscheinlichkeit α in % ist es auch gebräuchlich, die Aussagewahrscheinlichkeit P in % $= 1 - \alpha$ bzw. $100 - \alpha$ anzugeben. In dem Beispiel entspricht einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ eine Aussagewahrscheinlichkeit von 95%.

Anmerkung 6: Statt Aussagewahrscheinlichkeit P wurde früher die Bezeichnung „statistische Sicherheit" P bzw. S benutzt.

3.4. Abschätzen des wahren Mittelwertes μ

Den wahren Mittelwert μ der Grundgesamtheit kann man aus den in Abschnitt 2.1 zur Kennzeichnung der mittleren Lage genannten statistischen Maßzahlen einer Stichprobe abschätzen.

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ einer Stichprobe kann als Näherung für den wahren Mittelwert μ herangezogen werden, d. h. $\bar{x}$ ist ein erwartungstreuer Schätzwert für μ:

$$E(\bar{x}) = \mu \tag{13}$$